 ISBN : *978-979-16353-8-7*

A-6

BEBERAPA RELASI INKLUSI PADA RUANG BARISAN BANACH LATTICE

Elvina Herawaty[1], Supama[2] and Indah Emilia W [3]

[1] Department of Mathematic, FMIPA USU,[2,3]Department of Mathematic, FMIPA UGM
[1] herawaty.elv@gmail.com, [2]maspomo@yahoo.com, [3]e-mail: ind_wijayanti@yahoo.com

Abstrak

Diberikan ruang Riesz E dan unit urutan u pada E. Barisan $\{x_n\}$ pada E dikatakan konvergen urutan ke x, ditulis $x_n \xrightarrow{\sigma} x$, jika ada barisan turun $\{y_n\} \subset E$ sehingga $y_n \downarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$ dan $|x_n - x| \leq y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya diberikan Banach lattice L, koleksi semua barisan bernilai L dinyatakan dengan S_L. Pada paper ini, untuk sebarang fungsi-□ teritlak dari L ke E, yang memenuhi kondisi-Δ2 diperkenalkan ruang barisan bernilai Banach latiice

$$\ell_\phi^L = \left\{\bar{x} = \{x_k\} \in S_L : \exists f \in E,\ \rho_N(\bar{x}) \xrightarrow{\sigma} f \right\} \text{ dengan } \rho_N(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{N} \phi(x_k).$$

Akan diperlihatkan bahwa ℓ_ϕ^L ruang BK terhadap norma

$$\|\bar{x}\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 :\ \rho\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right) = \sup_{N\geq 1}\left\{\rho_N\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}\right)\right\} \leq u\right\}$$

Selanjutnya dengan menggunakan barisan $\bar{\lambda}$, diperkenalkan ruang barisan

$$\ell_\phi^L(\lambda) = \left\{\bar{x} = \{x_k\} \in S_L :\ \{\Lambda_n(\bar{x})\} \in \ell_\phi^L\right\} \text{ dengan } \Lambda_n(\bar{x}) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\, x_k$$

Akan diperlihatkan beberapa sifat topologinya, ruang $\ell_\phi^L(\lambda)$ dan ℓ_ϕ^L isometri isomorfik dan beberapa relasi inklusi yang melibatkan ruang barisan $\ell_\phi^L(\lambda)$.

Kata kunci : Ruang Riesz, unit urutan, Banach lattice, fungsi-□ teritlak, kondisi-Δ2, ruang BK, norma, barisan $\bar{\lambda}$, isometri isomorfik.

PENDAHULUAN

Notasi $S_{\mathbb{R}}$ berarti koleksi semua barisan bernilai real. Sebarang subruang vektor di $S_{\mathbb{R}}$ disebut **ruang barisan.**

Diberikan ruang barisan X, Y dan matriks infinit $A = (a_{nk})$, dengan a_{nk} bilangan real untuk setiap $n, k \in \mathbb{N}$. Matriks infinit A dikatakan memetakan X ke Y jika untuk setiap $\bar{x} = \{x_k\} \in X$, barisan $A\bar{x} = \{A_n(\bar{x})\}$ ada dan menjadi anggota Y, dengan

$$A_n(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \cdots (1)$$

Koleksi semua matriks infinit yang memetakan X ke Y dinotasikan dengan $(X : Y)$. Jadi $A \in (X : Y)$ jika dan hanya jika sisi kanan dari deret (1) konvergen untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan untuk setiap $\bar{x} = \{x_k\} \in X$, dan juga $A\bar{x} \in Y$ untuk setiap $\bar{x} \in X$.

Untuk sebarang ruang barisan X dan matriks infinit A dapat dibentuk ruang barisan baru yang disebut **domain matriks,** dinotasikan dengan X_A dan didefinisikan sebagai berikut

$$X_A = \{\bar{x} \in S_{\mathbb{R}} :\ A\bar{x} = \{A_n(\bar{x})\} \in X\}$$

 ISBN : *978-979-16353-8-7*

Dari domain matriks X_A, untuk $X \in \{\ell_\infty,\ c_0,\ c\}$ dapat diperlihatkan inklusi $X_A \subset X$ dan dan $X \subset X_\Delta$ berlaku, dengan A dan Δ merupakan matriks operator.

Mursaleen dan Noman [8 dan 9] mendefinisikan domain matriks dari matriks infinite $\Lambda = (\lambda_{nk})$ atas ruang barisan bernorma $X \in \{\ell_\infty,\ c_0,\ c,\ \ell_p\}$ untuk $1 \leq p < \infty$. Mereka membahas beberapa sifat topologinya dan relasi inklusi $X_\Lambda \subset X$.

Fungsi $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dengan sifat φ kontinu, naik, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ untuk $x > 0$ dan $\varphi(x) \longrightarrow \infty$ untuk $x \longrightarrow \infty$ disebut **fungsi Orlicz.** Dengan menggunakan fungsi Orlicz φ, Lindenstrauss dan Tzafriri [6] memperkenalkan ruang barisan

$$\ell_\varphi = \left\{ \overline{x} = \{x_k\} \in S_{\mathbb{R}} : \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right), \rho > 0 \right\}$$

yang merupakan ruang Banach terhadap norma

$$\|\overline{x}\| = inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

dan ruang ini disebut **ruang barisan Orlicz**. Mereka memperlihatkan bahwa setiap ruang barisan ℓ_φ memuat subruang barisan yang isomorfik dengan ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$. Ruang barisan Orlicz merupakan kasus khusus dari ruang Orlicz dibahas cukup lengkap pada [12].

Dengan fungsi Orlicz φ, Tripathy and Mahanta [16] mendefinisikan dan mempelajari ruang barisan berikut

$$m(\varphi, \Delta, \phi) = \left\{ \overline{x} = \{x_k\} \in S_{\mathbb{R}} : sup_{s \geq 1, \sigma \in P_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{i \in \sigma} \varphi\left(\frac{|\Delta x_i|}{\rho}\right) < \infty, \text{for some } \rho > 0 \right\}$$

Dalam hal ini P_s merupakan himpunan dari semua subhimpunan $\mathbb{N}$, yang memuat tidak lebih dari s. $\overline{\phi} = \{\phi_n\}$, merupakan barisan naik dari bilangan real positif sehingga $n\phi_{n+1} \leq (n+1)\phi_n$ dan $\phi_s \to \infty$, untuk $s \to \infty$.

Selanjutnya, dengan menggunakan fungsi Orlicz φ dan matriks infinit A beberapa peneliti telah mendefinisikan dan membahas ruang barisan berparanorma yang mempunyai sifat lebih umum dari padan ruang barisan bernorma. Sebagai contoh Altun and Bilgin [17] telah mendefinisikan ruang barisan $m(\varphi, A, \overline{\phi}, p)$. Braha [10] mendefinisikan dan mempelajari ruang barisan $m(\varphi, \overline{\phi}, q, \Lambda)$, untuk matriks infinit $\Lambda = (\lambda_{nk})$. Karakaya and Polat [4] mempelajari beberapa sifat dan relasi inklusi dari domain matriks atas ruang berparanorma $X(\lambda, p)$ untuk $X \in \{\ell_\infty,\ c_0,\ c\}$.

Selanjutnya fungsi $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dengan sifat $\phi(\cdot)$ kontinu, $\phi(\cdot) \uparrow$, $\phi(u) = \phi(-u)$ dan $\phi(u) = 0$ jika dan hanya jika $u = 0$ disebut **fungsi-$\boldsymbol{\phi}$** (phy-variant). Dengan menggunakan fungsi-ϕ, Rao [13] mempeperkenalkan ruang barisan fungsi.

Masalahnya semua ruang barisan yang dibicarakan para peneliti masih bernilai real. Sementara perkembangan ilmu pengetahuan tidak sekedar sistem real (kompleks). Salah satunya kearah struktur **Riesz**. Hal ini banyak digunakan dalam mekanika quantum.

Pada tulisan ini, penulis memperkenalkan ruang barisan bernilai Riesz atau khususnya bernilai **Banach lattice** dan dengan menggunakan **fungsi-$\boldsymbol{\phi}$ teritlak** yang didefinisikan dari Banach lattice ke ruang Riesz. Selanjutnya akan diperlihatkan beberapa sifat topologinya, isometri isomorfiknya dan relasi inklusinya.

1. Formulasi Dasar

Diberikan Banach lattice L. Koleksi semua barisan bernilai L dinotasikan dengan S_L. Dengan kata lain $S_L = \{\overline{x} = \{x_k\} : x_k \in L, \forall\, k \in \mathbb{N}\}$.

Subruang vektor $X \subset S_L$ disebut **ruang *L*-barisan**. Ruang L-barisan bernorma X disebut **ruang Banach** apabila X bersifat lengkap; yaitu setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Ruang Banach X disebut **ruang BK** jika fungsi koordinat $p_k : X \longrightarrow L$, kontinu $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Barisan $\overline{x} \in S_L$ disebut **barisan berhingga** jika ada $N \in \mathbb{N}$ sehingga $\overline{x} = \{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N,\ 0, 0,\ \cdots\}$. Untuk setiap $\overline{x} \in S_L$ dan $N \in \mathbb{N}$ didefinisikan $\overline{x}^N = \{x_k^N\}$ dengan

$$x_k^N = \begin{cases} x_k & , k \le N \\ 0 & , k > N \end{cases}$$

Ruang Banach X dikatakan **bersifat AK** jika X memuat semua barisan berhingga dan untuk setiap $\overline{x} \in X$ berlaku $\left\|\overline{x}^N - \overline{x}\right\|_X \longrightarrow 0$ untuk $N \longrightarrow \infty$.

Selanjutnya diberikan barisan $\overline{\lambda} = \{\lambda_k\}$, yaitu suatu barisan real positif naik kuat dan konvergen ke ∞. Dengan kata lain $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ dan $\lambda_k \to \infty$ untuk $k \to \infty$. Didefinisikan matriks infinit $\Lambda = (\lambda_{nk})$ dengan

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n} & (1 \le k \le n) \\ \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

Diberikan ruang Riesz E .Untuk dua elemen sebarang $f, g \in E$ ditulis $sup\{f, g\} = f \vee g$ dan $inf\{f, g\} = f \wedge g$, didefinisikan

$$f^+ = f \vee 0,\ f^- = (-f) \vee 0,\ |f| = f \vee (-f).$$

Teorema 1 : *Diberikan ruang Riesz E dan $f, g, h \in E$. Maka*

(i) $f + g = f \vee g + f \wedge g$

(ii) $(f \vee g) + h = (f + h) \vee (g + h)$

(iii) $|f| \vee |g| = (|f + g| + |f - g|)\ /\ 2$

(iv) $\alpha f + \beta g \le f \vee g$ untuk $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dengan $\alpha + \beta = 1$.

Elemen u pada ruang Riesz E disebut **unit urutan (unit),** jika untuk setiap $f \in E$ terdapat bilangan real $\alpha > 0$ sehingga berlaku $|f| \le \alpha u$.

Barisan $\{f_n\}$ pada E dikatakan **naik**, dinotasikan dengan $f_n \uparrow$, jika $f_1 \le f_2 \le \cdots$, Jika $f_n \uparrow$ dan $f = \sup\ \{f_n\}$ ada di dalam E, ditulis $f_n \uparrow f$. Barisan $\{g_n\} \subset E$ dikatakan **turun**, dinotasikan dengan $g_n \downarrow$, jika $g_1 \ge g \ge \cdots$. Jika $g_n \downarrow$ dan $g = \inf\ \{g_n\}$ ada di dalam E, ditulis $g_n \downarrow g$.

Barisan $\{f_n\}$ pada ruang Riesz E dikatakan **konvergen urutan** ke f , jika terdapat barisan turun $\{y_n\} \subset E$ dengan $y_n \downarrow 0$ dan terdapat bilangan asli n_0 sehingga berlaku

$$|f_n - f| \le y_n \text{ untuk setiap } n \ge n_0$$

Hal ini **ditulis** $f_k \xrightarrow{\sigma} f$.

Beberapa sifat konvergen urutan diberikan pada teorema berikut

Teorema 2 : (i) *Jika $f_k \uparrow f$ dan bilangan real* $\alpha > 0$, *maka* $\alpha f_k \uparrow \alpha f$

(ii) *Jika $f_k \uparrow f$ maka $f_k \xrightarrow{\sigma} f$.*

(iii) *Jika $f_k \uparrow$ dan $f_k \xrightarrow{\sigma} f$ maka $f_k \uparrow f$.*

(iv) *Jika $f_k \xrightarrow{\sigma} f$, $g_k \xrightarrow{\sigma} g$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ maka $\alpha f_k + \beta g_k \xrightarrow{\sigma} \alpha f + \beta g$*

(v) *Jika* $f_k \le g_k$ *dan* $g_k \xrightarrow{\sigma} g$ *maka* $f_k \xrightarrow{\sigma} g$.

Pada sistem bilangan real, pengertian konvergen dan konvergen urutan ekivalen. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3 : *Barisan* $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ *konvergen urutan jika dan hanya jika* $\{t_n\}$ *konvergen.*

PEMBAHASAN

1. Ruang Barisan Banach Lattice ℓ_ϕ^L

Diberikan Banach lattice L dan ruang Riesz E dengan unit urutan u. Fungsi $\phi : L \longrightarrow E$ dikatakan **fungsi-ϕ teritlak,** jika memenuhi sifat berikut: $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, $\phi(t) = \phi(-t)$, $\phi(\cdot) \uparrow$ dan $\phi(\cdot)$ kontinu.

Fungsi-ϕ teritlak, ϕ, dikatakan memenuhi **kondisi-Δ_2** jika ada bilangan real $M > 0$ sehingga berlaku $\phi(2t) \le M\phi(t)$ untuk setiap $t \in L^+$.

Contoh 4. Fungsi $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan aturan $\phi(\overline{x}) = |\overline{x}|$. merupakan fungsi-$\phi$ teritlak yang memenuhi kondisi-Δ_2

Contoh 5. Fungsi $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan aturan $\phi(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ merupakan fungsi-ϕ teritlak yang tidak memenuhi kondisi-Δ_2.

Untuk sebarang $N \in \mathbb{N}$ dan fungsi-ϕ teritlak , ϕ, yang memenuhi kondisi-Δ_2 dan bersifat konveks didefinisikan fungsi

$$\rho_N : S_L \longrightarrow E \text{ dengan aturan } \overline{x} \mapsto \boldsymbol{\rho_N(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{N} \phi(x_k)}.$$

Selanjutnya dibentuk himpunan

$$\boldsymbol{\ell_\phi^L = \left\{\overline{x} \in S_L : \exists f \in E \;\; \rho_N(\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} f\right\}}$$

Relasi urutan $\le$ pada $\boldsymbol{\ell_\phi^L}$ didefinisikan dengan urutan koordinat biasa, yaitu $\overline{x} \le \overline{y}$ jika dan hanya jika $x_k \le y_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

Sifat dasar dari himpunan $\boldsymbol{\ell_\phi^L}$ diberikan di bawah ini.

Teorema 6 : (i) *Himpunan* $\boldsymbol{\ell_\phi^L}$ *bersifat konveks*

(ii) $\boldsymbol{\ell_\phi^L}$ *merupakan ruang Riesz.*

Bukti : (ii) Diambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\overline{x} \in \ell_\phi^L$. Keadaan trivial untuk $\alpha = 0$. Apabila $\alpha \ne 0$ maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $|\alpha| \le 2^{n_0}$. Selanjutnya karena fungsi-ϕ teritlak, ϕ, memenuhi kondisi-Δ_2, genap dan naik maka $\phi(\alpha x_k) \le M^{n_0}\phi(x_k)$. Akibatnya untuk setiap $N \in \mathbb{N}$ berlaku $\rho_N(\alpha\overline{x}) \le M^{n_0}\rho_N(\overline{x})$. Karena $\overline{x} \in \ell_\phi^L$ maka ada $f \in E$ sehingga berlaku $M^{n_0}\rho_N(\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} f$. Akibatnya $\rho_N(\alpha\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} f$. Ini berarti $\alpha\overline{x} \in \ell_\phi^L$. Karena ρ_N bersifat genap, maka $|\overline{x}| \in \ell_\phi^L$.

Selanjutnya diambil sebarang $\overline{x}, \overline{y} \in \ell_\phi^L$, maka $|\overline{x}|$, $|\overline{y}| \in \ell_\phi^L$. Akan ditunjukkan untuk sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in \ell_\phi^L$. Keadaan trivial untuk $\alpha = \beta = 0$. Jika tidak demikian artinya salah satu tau keduanya tidak nol, dibentuk

$$\overline{z} = \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}|\overline{x}| + \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}|\overline{y}|$$

Karena ℓ_ϕ^L bersifat konveks maka $\overline{z} \in \ell_\phi^L$. Selanjutnya dari proses bukti diperoleh $(|\alpha| + |\beta|)\overline{z} \in \ell_\phi^L$. Hal ini berakibat $|\alpha||\overline{x}| + |\beta||\overline{y}| \in \ell_\phi^L$. Karena ρ_N bersifat genap, maka $\rho_N(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \rho_N(|\alpha||\overline{x}| + |\beta||\overline{y}|) = \rho_N\big((|\alpha| + |\beta|)\overline{z}\big) \xrightarrow{\sigma} g$ untuk suatu $g \in E$ dan $N \to \infty$.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Jadi $\alpha\overline{x}\ +\beta\overline{y}\in\ell_{\phi}^{L}$. $\cdots(1)$

Selanjutnya karena ℓ_{ϕ}^{L} linear, maka untuk setiap $\overline{x},\overline{y}\in\ell_{\phi}^{L}$ berakibat $\overline{x}+\overline{y}\in\ell_{\phi}^{L}$ dan $\overline{x}-\overline{y}\in\ell_{\phi}^{L}$. Diperoleh

$$\rho_{N}(\overline{x}\vee\overline{y})\leq\frac{1}{2}\rho_{N}(\overline{x}+\ \overline{y})+\frac{1}{2}\rho_{N}(\overline{x}-\ \overline{y})\xrightarrow{\sigma} f \text{ untuk suatu } f\in E.$$

Ini artinya $\overline{x}\vee\overline{y}\in\ell_{\phi}^{L}$. Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa $\overline{x}\wedge\overline{y}\in\ell_{\phi}^{L}$. Dengan kata lain diperoleh $\overline{x}\vee\overline{y}\in\ell_{\phi}^{L}$ dan $\overline{x}\wedge\overline{y}\in\ell_{\phi}^{L}$ $\cdots(2)$

Dari hasil (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa ℓ_{ϕ}^{L} merupakan ruang Riesz. ♦

Untuk unit u pada ruang riesz E dan $\rho_{N}(\overline{x}\ )\uparrow$ di E didefinisikan fungsi ρ dan $\|\cdot\|$ pada ℓ_{ϕ}^{L} sebagai berikut :

$\rho\ :\ \ell_{\phi}^{L}\longrightarrow E$ dengan aturan $\rho(\overline{x})=Sup_{N\geq1}\{\rho_{N}(\overline{x}\ )\}$ dan $\|\cdot\|\ :\ \ell_{\phi}^{L}\longrightarrow\mathbb{R}$ dengan aturan

$$\|\overline{x}\|=inf\left\{\varepsilon>0\ :\ \rho\left(\frac{\overline{x}}{\varepsilon}\right)\leq u\right\} \qquad \cdots(3)$$

Teorema 7 : *Fungsi $\|\cdot\|$ merupakan norma pada ℓ_{ϕ}^{L}.*

Hubungan antara fungsi ρ dan $\|\cdot\|$ diberikan pada lemma dibawah ini

Lemma 8 : *Jika diberikan $\overline{x}\in\ell_{\phi}^{L}$, maka untuk setiap bilangan $\beta>0$ terdapat $\alpha>0$ sehingga apabila $\|\overline{x}\|\leq\alpha$ berakibat ada $v\in E$ sehingga $\rho(\overline{x})\leq v$.*

Lemma 9 : *Diberikan $\overline{x}\in\ell_{\phi}^{L}$, maka untuk setiap bilangan $\alpha,\gamma>0$ terdapat $v\in E$ sehingga apabila $\rho(\overline{x})\leq v$ berakibat $\|\overline{x}\|\leq\alpha$.*

Teorema 10 : *ℓ_{ϕ}^{L} merupakan ruang Banach lattice.*

Bukti : Dengan menggunakan teorema 6 (ii) dapat diperlihatkan bahwa ℓ_{ϕ}^{L} merupakan ruang Riesz bernorma terhadap norma (3). Selanjutnya diambil sebarang barisan Cauchy $\{\overline{x}^{p}\}\subset\ell_{\phi}^{L}$, berarti untuk setiap bilangan asli n terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $p,\ q\geq N$ berlaku $\|\overline{x}^{p}-\overline{x}^{q}\|<\frac{1}{n}$. Karena ρ_{N} fungsi naik dan konveks, maka

$$\rho(\overline{x}^{p}-\overline{x}^{q})\leq\frac{1}{n}\rho\left(\frac{\overline{x}^{p}-\overline{x}^{q}}{\frac{1}{n}}\right)\leq\frac{1}{n}u.$$

Oleh karena itu untuk setiap $N\in\mathbb{N}$ berlaku $\sum_{k=1}^{N}\phi(x_{k}^{p}-x_{k}^{q})=\rho_{N}(\overline{x}^{p}-\overline{x}^{q})\leq\frac{1}{n}u.$

Jadi untuk setiap $k\in\mathbb{N}$ berlaku $\phi(x_{k}^{p}-x_{k}^{q})\leq\frac{1}{n}u.$ Karena fungsi- ϕ kontinu pada L, maka

$$\lim_{p,q\to\infty}\phi(x_{k}^{p}-x_{k}^{q})=\ \phi\left(\lim_{p,q\to\infty}(x_{k}^{p}-x_{k}^{q})\right)\leq\frac{1}{n}u.$$

Karena berlaku untuk setiap $n\in\mathbb{N}$ maka $\phi\left(\lim\limits_{p,q\to\infty}(x_{k}^{p}-x_{k}^{q})\right)=0$.Akibatnya $\lim\limits_{p,q\to\infty}(x_{k}^{p}-x_{k}^{q})=0$. Hal ini berarti $\{x_{k}^{p}\}$ merupakan barisan Cauchy di L untuk L Banach lattice, maka ada $x_{k}\in L$ sehingga $x_{k}^{p}\to x_{k}$ untuk $p\to\infty$.

Dibentuk $\overline{x}=\{x_{k}\}\in S_{L}$. Akan ditunjukkan barisan $\{\overline{x}^{p}\}$ konvergen ke $\overline{x}$ dan $\overline{x}\in\ell_{\phi}^{L}$.

Karena fungsi- ϕ kontinu pada L, maka

$$\lim_{q\to\infty}\rho_{N}\left(\frac{\overline{x}^{p}-\overline{x}^{q}}{\varepsilon}\right)=\lim_{q\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\phi\left(\frac{x_{k}^{p}-x_{k}^{q}}{\varepsilon}\right)=\sum_{k=1}^{N}\phi\left(\frac{x_{k}^{p}-\lim_{q\to\infty}x_{k}^{q}}{\varepsilon}\right)=\rho_{N}\left(\frac{\overline{x}^{p}-\overline{x}}{\varepsilon}\right).$$

Karena $\lim_{p,q\to\infty}\left\|\overline{x}^p - \overline{x}^q\right\|_{\ell_\phi^L} = 0$, berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $p, q \geq n_0$ berlaku $\left\|\overline{x}^p - \overline{x}^q\right\|_{\ell_\phi^L} < \varepsilon$ atau $\rho\left(\frac{\overline{x}^p - \overline{x}^q}{\varepsilon}\right) \leq u$.

Akibatnya

$$\lim_{p,q\to\infty} \rho_N\left(\frac{\overline{x}^p - \overline{x}^q}{\varepsilon}\right) \leq u \text{ untuk setiap } N \in \mathbb{N}.$$

Oleh karena itu

$$\lim_{p\to\infty} \rho_N\left(\frac{\overline{x}^p - \overline{x}}{\varepsilon}\right) = \lim_{p,q\to\infty} \rho_N\left(\frac{\overline{x}^p - \overline{x}^q}{\varepsilon}\right) \leq u \text{ untuk setiap } N \in \mathbb{N}.$$

Jadi $\lim_{p\to\infty}\left\|\overline{x}^p - \overline{x}\right\|_{\ell_\phi^L} = 0$, yaitu barisan barisan $\{\overline{x}^p\}$ konvergen ke $\overline{x}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\overline{x} \in \ell_\phi^L$. Karena fungsi-$\phi$ konveks dan memenuhi kondisi-Δ_2 maka ada bilangan real $M > 0$ sehingga berlaku

$$\rho_N(\overline{x}) = \rho_N\left(2\left(\frac{1}{2}\overline{x}^p + \frac{1}{2}(\overline{x}^p - \overline{x})\right)\right) \leq \frac{M}{2}\left(\rho_N(\overline{x}^p) + \rho_N(\overline{x}^p - \overline{x})\right)$$

Karena $\overline{x}^p \in \ell_\phi^L$ maka $\rho_N(\overline{x}^p) \xrightarrow{\sigma} f$ untuk suatu $f \in E$. Akibatnya $\frac{M}{2}\rho_N(\overline{x}^p) \xrightarrow{\sigma} \frac{M}{2}f$ untuk suatu $\frac{M}{2}f \in E$.

Karena $\rho_N(\overline{x}^p - \overline{x}) \uparrow$ di E dan $\rho(\overline{x}^p - \overline{x}) = Sup_{N\geq 1}\{\rho_N(\overline{x}^p - \overline{x})\}$ ada di E, maka $\rho_N(\overline{x}^p - \overline{x}) \uparrow \rho(\overline{x}^p - \overline{x})$, akibatnya $\frac{M}{2}\rho_N(\overline{x}^p - \overline{x}) \xrightarrow{\sigma} \frac{M}{2}\rho(\overline{x}^p - \overline{x})$. Oleh karena itu $\rho_N(\overline{x}^p) \xrightarrow{\sigma} g$ untuk $g = \frac{M}{2}f + \frac{M}{2}\rho(\overline{x}^p - \overline{x}) \in E$. Jadi $\overline{x} \in \ell_\phi^L$.

Jadi ℓ_ϕ^L merupakan ruang L-barisan Banach. Karena ℓ_ϕ^L ruang Riesz bernorma dan bersifat lengkap maka ℓ_ϕ^L merupakan ruang barisan Banach lattice. ♦

Teorema 11 : *ℓ_ϕ^L merupakan ruang BK.*

Bukti : Telah diperlihatkan bahwa ℓ_ϕ^L merupakan ruang Banach terhadap norma (3). Akan ditunjukkan fungsi koordinat $p_k : \ell_\phi^L \longrightarrow L$ kontinu $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Diambil sebarang $\overline{y} \in \ell_\phi^L$ dan barisan $\{\overline{x}^n\} \subset \ell_\phi^L$ dengan $\lim_{n\to\infty}\overline{x}^n = \overline{y}$. Berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$, dengan $0 < \varepsilon \leq 1$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\rho_N(\overline{x}^n - \overline{x}) \leq \varepsilon\rho_N\left(\frac{\overline{x}^n - \overline{x}}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon u \text{ untuk unit } u \in E.$$

Jadi untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan $n \geq n_0$, berlaku $\phi(x_k^n - y_k) \leq \varepsilon u$. Karena fungsi$-\phi$ kontinu maka $\phi(\lim_{n\to\infty} x_k^n - y_k) \leq \varepsilon u$ untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$. Akibatnya $\phi(\lim_{n\to\infty} x_k^n - y_k) = 0$, Jadi $\lim_{n\to\infty} x_k^n = y_k$. Dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} p_k(\overline{x}^n) = p_k(\overline{y})$, Jadi $p_k : \ell_\phi^L \longrightarrow L$ kontinu ℓ_ϕ^L . Jadi ℓ_ϕ^L merupakan ruang BK. ♦

Teorema 12 : *Ruang ℓ_ϕ^L bersifat AK dan untuk setiap $\overline{x} \in \ell_\phi^L$ dan $N \in \mathbb{N}$ berlaku $\|\overline{x}^N\| \leq \|\overline{x}\|$*

Bukti : Telah diperlihatkan bahwa ℓ_ϕ^L merupakan ruang Banach terhadap norma (3). Selanjutnya diambil sebarang $\overline{x} \in \ell_\phi^L$ dan $N \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan $\overline{x}^N \in \ell_\phi^L$ dan $\|\overline{x}^N - \overline{x}\| \longrightarrow 0$ untuk $N \longrightarrow \infty$.

Karena untuk setiap $N \in \mathbb{N}$, $x_k^n = \begin{cases} x_k, & k \leq N \\ 0, & k > N \end{cases}$ maka $\phi(x_k^n) = \begin{cases} \phi(x_k) & k \leq N \\ 0 & k > N \end{cases}$.

Diambil sebarang $M \in \mathbb{N}$. Jika $M \leq N$ maka

 ISBN : *978-979-16353-8-7*

$$\rho_M(\overline{x}^N) = \sum_{k=1}^{M} \phi(x_k^n) = \sum_{k=1}^{M} \phi(x_k) = \sum_{k=1}^{N} \phi(x_k) = \rho_N(\overline{x})$$

Selanjutnya jika $M > N$, diperoleh

$$\rho_M(\overline{x}^N) = \sum_{k=1}^{N} \phi(x_k^n) + \sum_{k=N+1}^{M} \phi(x_k) = \sum_{k=1}^{N} \phi(x_k) = \rho_N(\overline{x})$$

Karena $\overline{x} \in \ell_\phi^L$ maka ada $f \in E$ sehingga $\rho_M(\overline{x}^N) \xrightarrow{\sigma} f$. Jadi $\overline{x}^N \in \ell_\phi^L$ ⋯ (4)

Selanjutnya diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, dengan $0 < \varepsilon \leq 1$, maka menurut sifat Archimedean ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{\varepsilon} \leq 2^{n_0}$. Akibatnya untuk setiap $N \geq n_0$ berlaku $\frac{1}{\varepsilon} \leq 2^N$. Karena fungsi ρ_M naik dan memenuhi kondisi-Δ_2 maka ada konstanta $M > 0$ sehingga $\rho\left(\frac{\overline{x}^N - \overline{x}}{\varepsilon}\right) \leq M^N \rho(\overline{x}^N - \overline{x})$. Karena $\rho(\overline{x}^N - \overline{x}) \in E$ dengan E ruang Riesz yang memuat unit u maka dapat dipilih $\rho(\overline{x}^N - \overline{x}) \leq \frac{u}{M^N}$. Akibatnya $\rho\left(\frac{\overline{x}^N - \overline{x}}{\varepsilon}\right) \leq u$ untuk setiap $N \geq n_0$. Jadi $\|\overline{x}^N - \overline{x}\| \longrightarrow 0$ untuk $N \longrightarrow \infty$. ⋯ (5)

Dari hasil (4) dan (5) dapat disimpulkan bahwa ℓ_ϕ^L bersifat AK.

Terakhir, karena $\overline{x}^N \leq \overline{x}$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$ dan fungsi$-\phi$ genap dan naik pada L^+ maka $\rho\left(\frac{\overline{x}^N}{\varepsilon}\right) \leq \rho\left(\frac{\overline{x}}{\varepsilon}\right)$ untuk setiap $\overline{x} \in \ell_\phi^L$. Jadi $\|\overline{x}^N\| \leq \|\overline{x}\|$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. ♦

2. Domain Matriks $\boldsymbol{\ell_\phi^L(\lambda)}$

Untuk sebarang $\overline{x} \in S_L$, transformasi matirks $\Lambda = \{\lambda_{nk}\}$ pada $\overline{x}$ merupakan barisan $\Lambda\,\overline{x} = \{\Lambda_n(\overline{x})\}$ dengan

$$\Lambda_n(\overline{x}) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Selanjutnya didefinisikan ruang barisan berikut :

$$\boldsymbol{\ell_\phi^L(\lambda) = \{\overline{x} \in S_L :\ \Lambda\,\overline{x} = \{\Lambda_n(\overline{x})\} \in \ell_\phi^L\}}$$

dan disebut **domain matriks** dari matriks infinit Λ pada ℓ_ϕ^L.

Fungsi$\|\cdot\|_\lambda$ dari $\ell_\phi^L(\lambda)$ ke $\mathbb{R}$ didefinisikan dengan aturan sebagai berikut

$$\|\overline{x}\|_\lambda = inf\left\{\varepsilon > 0 :\ \rho\left(\frac{\Lambda\overline{x}}{\varepsilon}\right) \leq u\right\} \text{ dengan } \rho\left(\frac{\Lambda\overline{x}}{\varepsilon}\right) = Sup_{N\geq 1}\left\{\rho_N\left(\frac{\Lambda\overline{x}}{\varepsilon}\right)\right\}.$$

Teorema 13 : *Fungsi$\|\cdot\|_\lambda$ merupakan norma pada $(\ell_\phi^L)(\lambda)$.*

Hubungan antara norma $\|\cdot\|_\lambda$, $\|\cdot\|_L$ diberikan pada lemma berikut

Lemma 14 : *Diberikan $\overline{x} \in \ell_\phi^L(\lambda)$. Jika $\|\overline{x}^n\|_\lambda \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$ maka untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ berlaku $\|x_k^n\|_L \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$*

Lemma berikut digunakan untuk memperlihatkan bahwa $\ell_\phi^L(\lambda)$ ruang BK.

Lemma 15 : *Diberikan matriks infinit $A = \{a_{nk}\}$, jika $p_n \circ A :\ S_L \longrightarrow L$ kontinu untuk setiap n dengan fungsi koordinat $p_n :\ \ell_\phi^L \longrightarrow L$ maka transformasi matriks*

$$A : S_L \longrightarrow \ell_\phi^L \text{ linear kontinu.}$$

Teorema 16 : *$\ell_\phi^L(\lambda)$ merupakan ruang BK terhadap norma $\|\cdot\|_\lambda$.*

Bukti : Diambil sebarang barisan Cauchy $\{\bar{x}^p\} \subset \ell_\phi^L(\lambda)$, maka $\Lambda\bar{x}^p = \{\Lambda_n \bar{x}^p\}$ merupakan barisan Cauchy di ℓ_ϕ^L. Karena ℓ_ϕ^L ruang BK maka ada $\bar{y} \in \ell_\phi^L$ sehingga $\Lambda\bar{x}^p \longrightarrow \bar{y}$ untuk $p \longrightarrow \infty$ dan fungsi $(p_n \circ \Lambda)(\bar{x}) = \Lambda_n(\bar{x})$ kontinu. Akibatnya $\Lambda : S_L \longrightarrow \ell_\phi^L$ dengan $\bar{x} \longmapsto \Lambda\bar{x}$ kontinu. Oleh karena itu untuk setiap barisan $\{\bar{x}^p\} \subset S_L$ yang konvergen ke $\bar{x}$ berakibat barisan $\{\Lambda\bar{x}^p\}$ konvergen ke $\Lambda\bar{x}$.

Jadi terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\left\|\Lambda\bar{x}^p - \Lambda\bar{x}\right\|_{\ell_\phi^L} < \varepsilon$ untuk setiap $p \geq n_0$.

Artinya $\rho\left(\frac{\Lambda\bar{x}^p - \Lambda\bar{x}}{\varepsilon}\right) \leq u$ untuk unit $u \in E$. Jadi $\left\|\bar{x}^p - \bar{x}\right\|_\lambda < \varepsilon$ untuk setiap $p \geq n_0$.
Karena $\Lambda\bar{x} = \bar{y} \in \ell_\phi^L$ maka $\bar{x} \in \ell_\phi^L$. Jadi $\ell_\phi^L(\lambda)$ merupakan ruang Banach $\cdots(6)$
Selanjutnya diambil sebarang barisan $\{\bar{x}^p\} \subset \ell_\phi^L(\lambda)$ dengan $\bar{x}^p \longrightarrow \bar{x}$ di $\ell_\phi^L(\lambda)$ untuk $p \longrightarrow \infty$. Akan ditunjukkan barisan $\{p_n(\bar{x}^p)\}$ konvergen ke $p_n(\bar{x})$.
Karena $\bar{x}^p \longrightarrow \bar{x}$ di $\ell_\phi^L(\lambda)$ untuk $p \longrightarrow \infty$, berarti untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dengan $0 < \varepsilon \leq 1$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\left\|\bar{x}^p - \bar{x}\right\|_\lambda < \varepsilon$ untuk setiap $p \geq n_0$. Jadi $\rho\left(\frac{\Lambda\bar{x}^p - \Lambda\bar{x}}{\varepsilon}\right) \leq u$ untuk setiap $p \geq n_0$. Maka $\sum_{n=1}^{N} \phi\left(\frac{\Lambda_n\bar{x}^p - \Lambda_n\bar{x}}{\varepsilon}\right) \leq \rho\left(\frac{\Lambda\bar{x}^p - \Lambda\bar{x}}{\varepsilon}\right) \leq u$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Jadi untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\phi\left(\Lambda_n\bar{x}^p - \Lambda_n\bar{x}\right) \leq \varepsilon\phi\left(\frac{\Lambda_n\bar{x}^p - \Lambda_n\bar{x}}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon u$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka $\phi\big(\Lambda_n\bar{x}^p - \Lambda n x = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Jadi $\Lambda_n\bar{x}^p - \Lambda_n\bar{x} = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\left\|x_n^p - x_n\right\|_L = 0 < \varepsilon$ untuk setiap $p \geq n_0$. Ini artinya $p_n(\bar{x}^p) \longrightarrow p_n(\bar{x})$ di L untuk $p \longrightarrow \infty$.
Oleh karena itu fungsi $p_n : \ell_\phi^L(\lambda) \longrightarrow L$ kontinu $\cdots(7)$
Dari hasil (6) dan (7) dapat disimpulkan bahwa $\ell_\phi^L(\lambda)$ merupakan ruang BK. ♦

Berikut ini diperlihatkan isomorfisma antara ruang $\ell_\phi^L(\lambda)$ dengan ruang ℓ_ϕ^L.

Teorema 17 : *Ruang barisan Banach lattice* $\ell_\phi^L(\lambda)$ *isomorfik secara isometri dengan ruang barisan* ℓ_ϕ^L.

Bukti : Didefinisikan operator $T : \ell_\phi^L(\lambda) \longrightarrow \ell_\phi^L$ dengan aturan $T\bar{x} = \Lambda\bar{x}$. Jelas T merupakan operator linear. Selanjutnya diperoleh

$$Ker\ T = \left\{\bar{x} \in \ell_\phi^L(\lambda) : T\bar{x} = \bar{0}_{\ell_\phi^L}\right\} = \left\{\bar{x} \in \ell_\phi^L(\lambda) : \Lambda_n(\bar{x}) = \bar{0}_{\ell_\phi^L}\ \forall n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Dengan kata lain $Ker\ T = \{\bar{0}\}$. Ini berarti T injektif $\cdots(8)$
Selanjutnya diambil sebarang $\bar{y} = \{y_k\} \in \ell_\phi^L$ dan didefinisikan barisan $\bar{x} = \{x_k(\lambda)\}$ dengan

$$x_k(\lambda) = \sum_{j=k-1}^{k} (-1)^{k-j} \frac{\lambda_j}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_j = y_k - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_{k-1}, (k \in \mathbb{N})$$

maka $x_k(\lambda) \in L$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan $\Lambda_n(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}\, x_k(\lambda) = y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\bar{y} = \{y_k\} \in \ell_\phi^L$ maka $\rho_N(\bar{y}) = \rho_N(\Lambda\bar{x}) \longrightarrow f$ untuk suatu $f \in E$. Akibatnya $\Lambda\bar{x} \in \ell_\phi^L$. Jadi ada $\bar{x} \in \ell_\phi^L(\lambda)$ dan $\Lambda\bar{x} = \bar{y}$. Ini berarti T surjektif. $\cdots(9)$
Selanjutnya diambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \left(\ell_\phi^L\right)_\lambda$, diperoleh

$$\Lambda_n(\bar{x} \vee \bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}(x_k \vee y_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}(x_k)\right) \vee \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}(y_k)\right)$$

Jadi $\Lambda(\overline{x} \vee \overline{y}) = \{\Lambda_n(\overline{x} \vee \overline{y})\} = (\Lambda\overline{x}) \vee (\Lambda\overline{y})$. Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa $\Lambda(\overline{x} \wedge \overline{y}) = (\Lambda\overline{x}) \wedge (\Lambda\overline{y})$. $\cdots(10)$

Terakhir diperoleh $\|T\overline{x}\|_\lambda = inf\left\{\varepsilon > o :\ \rho\left(\frac{\Lambda\overline{x}}{\varepsilon}\right) \le 1\right\} = \|\overline{x}\|_\lambda$ $\cdots(11)$

Menurut hasil yang diperoleh dari (8) sampai dengan (11) berarti $\ell_\phi^L(\lambda)$ isomorfik secara isometri dengan ℓ_ϕ^L , jadi teorema terbukti ♦

3. Relasi Inklusi pada *L*-Ruang Barisan

Lemma 18 : [8] *Untuk sebarang barisan* $\overline{x} = \{x_k\} \in S_L$ *dan* $n \in \mathbb{N}$ *berlaku*

$$x_n - \Lambda_n(\overline{x}) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}(x_k - x_{k-1})$$

Teorema 19 : *Inklusi* $\ell_\phi^L(\lambda) \subset \ell_\phi^L$ *berlaku jika dan hanya jika* $S(\overline{x}) \in \ell_\phi^L$ *untuk setiap* $\overline{x} \in \ell_\phi^L(\lambda)$.

Bukti : (Syarat cukup inklusi) Diambil sebarang barisan $\overline{x} \in \ell_\phi^L(\lambda)$, maka menurut hipotesa $\overline{x} \in \ell_\phi^L$. Jadi $\rho_N(\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} f$ untuk suatu $f \in E$. Perhatikan bahwa

$$S(\overline{x}) = \{x_n - \Lambda_n(\overline{x})\} = \{x_n\} - \{\Lambda_n(\overline{x})\} = \overline{x} - \Lambda\overline{x}.$$

Karena $\overline{x} \in \ell_\phi^L(\lambda)$ maka $\Lambda\overline{x} \in \ell_\phi^L$, oleh karena itu ada $f_1 \in E$ sehingga $\rho_N(\Lambda\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} f_1$. Karena $\overline{x} \in \ell_\phi^L$ maka $f_2 \in E$ sehingga $\rho_N(\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} f_2$. Selanjutnya karena fungsi$-\phi$ teritlak memenuhi kondisi-Δ_2, naik dan bersifat konveks, maka ada bilangan $M > 0$ sehingga

$$\rho_N\big(S(\overline{x})\big) \le \rho_N\left(2\left(\frac{1}{2}(\overline{x} + \Lambda\overline{x})\right)\right) \le \frac{M}{2}\{\rho_N(\overline{x}) + \rho_N(\Lambda\overline{x})\}$$

Akibatnya $\rho_N\big(S(\overline{x})\big) \xrightarrow{\sigma} g$ untuk $g = \frac{M}{2}(f_1 + f_2) \in E$. Jadi $S(\overline{x}) \in \ell_\phi^L, \forall\, \overline{x} \in \ell_\phi^L(\lambda)$.

(Syarat perlu). Diambil sebarang barisan $\overline{x} \in \ell_\phi^L(\lambda)$, maka $\Lambda\overline{x} \in \ell_\phi^L$ dan menurut hipotesa $S(\overline{x}) \in \ell_\phi^L$. Akibatnya ada $f_1 \in E$ dan $f_2 \in E$ sehingga $\rho_N(\Lambda\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} f_1$ dan $S(\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} f_2$. Karena $\overline{x} = S(\overline{x}) + \Lambda\overline{x}$ dan fungsi$-\phi$ teritlak memenuhi kondisi-Δ_2, naik dan bersifat konveks, maka

$$\rho_N(\overline{x}) \le \rho_N\left(2\left(\frac{1}{2}\left(\overline{S(\overline{x})} + \Lambda\overline{x}\right)\right)\right) \le \frac{M}{2}\{\rho_N(\,S(\overline{x})) + \rho_N(\Lambda\overline{x})\}.$$

Akibatnya $\rho_N(\overline{x}) \xrightarrow{\sigma} g$ untuk $g = \frac{M}{2}(f_1 + f_2) \in E$. Ini artinya $\overline{x} \in \ell_\phi^L(\lambda)$. Jadi berlaku inklusi $\ell_\phi^L(\lambda) \subset \ell_\phi^L$ ♦

Untuk barisan bilangan real $\overline{\lambda} = \{\lambda_k\}$ dengan $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ dan $\lambda_k \to \infty$ untuk $k \to \infty$, berakibat $\frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2} > \cdots$ dan $\frac{1}{\lambda_k} \to 0$ untuk $k \to \infty$. Berarti $\frac{1}{\overline{\lambda}} = \left\{\frac{1}{\lambda_n}\right\}$ merupakan barisan bilangan real turun dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k \ge k_0$ berlaku $\frac{1}{\lambda_k} < \varepsilon$.

Didefinisikan barisan $\overline{v} \in S_L$ dengan $\overline{v} = \left\{\frac{v_1}{\lambda_{k_0}}, 0, 0, \cdots\right\}$, maka $\rho_N(\overline{v}) = \sum_{k=1}^{N}\phi(v_k) = \phi\left(\frac{v_1}{\lambda_{k_0}}\right) \le \frac{1}{\lambda_{k_0}}\phi(v_1) \le \frac{\beta u}{\lambda_{k_0}}$ untuk suatu konstanta $\beta > 0$ dan u unit di E.

Jika $k_0 < N$ maka $k_0 \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ dan $\frac{1}{\lambda_N} < \frac{1}{\lambda_{k_0}}$. Jadi ada barisan turun $\overline{y}$ di E ;

$$\overline{y} = \left\{\frac{\beta u}{\lambda_1}, \frac{\beta u}{\lambda_2}, \cdots, \frac{\beta u}{\lambda_N}, \cdots\right\}.$$

$y_N \downarrow$ di E dan $\frac{\beta u}{\lambda_N} \longrightarrow 0$ untuk $N \to \infty$. Karena $\rho_N(\overline{v}) \le \frac{\beta u}{\lambda_{k_0}}$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$ dan $\frac{1}{\lambda_{k_0}} < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka untuk $\varepsilon_0 = \frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_N}$ berlaku $\frac{1}{\lambda_{k_0}} < \frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_N}$.

Jadi $\rho_N(\overline{v}) \le \frac{\beta u}{\lambda_{k_0}} < \frac{\beta u}{\lambda_{k_0}} . \frac{\lambda_{k_0}}{\lambda_N} = \frac{\beta u}{\lambda_N} = y_N$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\rho_N(\overline{v}) \xrightarrow{\sigma} 0_E$. Jadi $\overline{v} \in \ell_\phi^L$.

Jika $k_0 > N$ maka $k_0 \in \{N+1, N+\ 2, \cdots 1\}$ dan $\frac{1}{\lambda_{k_0}} < \frac{1}{\lambda_N}$. Karena $\frac{\beta u}{\lambda_1} > \frac{\beta u}{\lambda_2} > \cdots > \frac{\beta u}{\lambda_N} > \cdots$ maka ada $y_N \downarrow 0$ di E dan $\rho_N(\overline{v}) \le \frac{\beta u}{\lambda_{k_0}} < \frac{\beta u}{\lambda_N} = y_N$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\rho_N(\overline{v}) \xrightarrow{\sigma} 0_E$. Jadi $\overline{v} \in \ell_\phi^L$.

Karena $\sum_{n=1}^N \phi\big(\Lambda_n(\overline{v})\big) \le \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_1}{\lambda_{k_0}} \phi\left(\frac{1}{\lambda_N} x_1\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_{k_0}}\left(\phi\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right) + \phi\left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right) + \cdots + \phi\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)\right)$ dan ϕ genap dan naik, maka

$$\rho_N(\Lambda\overline{v}) = \sum_{n=1}^N \phi\big(\Lambda_n(\overline{v})\big) \le \frac{\lambda_1}{\lambda_{k_0}}\left(\phi\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right) + \phi\left(\frac{x_2}{\lambda_2}\right) + \cdots + \phi\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)\right)$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_{k_0}}\left(N\phi\left(\frac{x_1}{\lambda_N}\right)\right) \le \frac{\lambda_1}{\lambda_{k_0}} \beta u = \frac{\beta_1 u}{\lambda_{k_0}} \text{ untuk konstanta } \beta_1 = \lambda_1 \beta.$$

Dengan proses yang sama dibentuk $\overline{y} = \left\{\frac{\beta u}{\lambda_1}, \frac{\beta u}{\lambda_2}, \cdots, \frac{\beta u}{\lambda_N}, \cdots\right\}$. Jadi ada $y_N \downarrow 0$ di E dan $\rho_N(\Lambda\overline{v}) \le y_N$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Berarti $\rho_N(\Lambda\overline{v}) \xrightarrow{\sigma} 0_E$. Akibatnya $\Lambda\overline{v} \in \ell_\phi^L$.
Oleh karena itu diperoleh kesimpulan $\overline{v} \in \ell_\phi^L$ dan $\overline{v} \in \ell_\phi^L(\lambda)$.

Lemma 20 : *Jika* $\overline{v} = \left\{\frac{v_1}{\lambda_{k_0}}, 0, 0, \cdots\right\} \in S_L$ *maka* $\ell_\phi^L \cap \ell_\phi^L(\lambda) \neq \emptyset$.

Untuk $\overline{x} \in S_L$ dibentuk $y_n = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$, maka $\frac{y_1}{\lambda_1} > \frac{y_2}{\lambda_2} > \cdots$. Katakan $\overline{z} = \left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$, dan diperoleh teorema berikut

Teorema 21 : *Jika* $\overline{z} \notin \ell_\phi^L$ *maka inklusi* $\ell_\phi^L \subset \ell_\phi^L(\lambda)$ *tidak berlaku.*

Bukti : Jika $\overline{z} \notin \ell_\phi^L$ berarti $\rho_N(\overline{z})$ tidak konvergen kesetiap $f \in E$. Jadi untuk setiap $g_N \downarrow$ di E dengan $g_N \downarrow 0$ untuk $N \to \infty$, ada $N_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\left|\rho_{N_0}(\overline{z}) - f\right| > g_{N_0}$.

Karena $\overline{v} = \left\{\frac{v_1}{\lambda_{k_0}}, 0, 0, \cdots\right\} \in \ell_\phi^L$ maka $\overline{v} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{k_0}}\left\{\frac{v_1}{\lambda_1}, 0, 0, \cdots\right\} \in \ell_\phi^L$.

Katakan $\overline{q} = \left\{\frac{v_1}{\lambda_1}, 0, 0, \cdots\right\}$, maka $\phi\big(\Lambda_n(\overline{q})\big) = \phi\left(\frac{v_1}{\lambda_1}\right) \ge \phi\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)$. Oleh karena itu $\rho_N(\Lambda\overline{q}) \ge \rho_N(\overline{z})$ untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\Lambda\overline{q} \notin \ell_\phi^L$ atau $\overline{q} \notin \ell_\phi^L(\lambda)$. Jadi barisan $\overline{q} = \left\{\frac{x_1}{\lambda_1}, 0, 0, \cdots\right\}$ di ℓ_ϕ^L tetapi tidak di $\ell_\phi^L(\lambda)$.

Dengan kata lain inklusi $\ell_\phi^L \subset \ell_\phi^L(\lambda)$ tidak berlaku. ♦

Teorema 22 : *Jika inklusi* $\ell_\phi^L \subset \ell_\phi^L(\lambda)$ *berlaku maka* $\overline{z} \in \ell_\phi^L$

Bukti : Dari proses bukti lemma 21 telah diperlihatkan bahwa $\overline{q} = \left\{\frac{x_1}{\lambda_1}, 0, 0, \cdots\right\} \in \ell_\phi^L$. Menurut hipotesa $\ell_\phi^L \subset \ell_\phi^L(\lambda)$, maka

$$\rho_N(\Lambda\overline{q}) = \sum_{n=1}^{N} \phi\left(\Lambda_n(\overline{q})\right) = \sum_{n=1}^{N} \phi\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \phi\left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right) = \rho_N(\overline{z}).$$

Karena $\rho_N(\Lambda\overline{p}) \xrightarrow{\sigma} f$ untuk suatu $f \in E$, maka $\rho_N(\overline{z}) \xrightarrow{\sigma} f$. Jadi $\overline{z} \in \ell_\phi^L$ ♦

KESIMPULAN

Untuk ruang L-barisan ℓ_ϕ^L berhasil diperlihatkan beberapa sifat topologinya, antara lain ℓ_ϕ^L merupakan ruang BK terhadap norma

$$\|\overline{x}\| = inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{\overline{x}}{\varepsilon}\right) = sup_{N\geq 1}\left\{\rho_N\left(\frac{\overline{x}}{\varepsilon}\right)\right\} \leq u\right\}$$

dan ℓ_ϕ^L bersifat AK. Dengan menggunakan sifat topologi tersebut dapat diturunkan bahwa ℓ_ϕ^L ruang Banach lattice.

Selanjutnya dengan menggunakan matriks infinit $\Lambda = (\lambda_{nk})$ dan ruang L-barisan ℓ_ϕ^L dibentuk domain matriks $\ell_\phi^L(\lambda)$. Pada domain matriks ini berhasil diperlihatkan beberapa sifat topologinya dan juga

(i) $\ell_\phi^L \cong \ell_\phi^L(\lambda)$ dan isometri

(ii) Syarat perlu dan cukup berlakunya relasi inklusi $\ell_\phi^L \subset \ell_\phi^L(\lambda)$.

(iii) $\ell_\phi^L \cap \ell_\phi^L(\lambda) \neq \emptyset$.

(iv) Memperoleh fakta bahwa terdapat barisan bernilai Banach lattice sehingga inklusi $\ell_\phi^L \subset \ell_\phi^L(\lambda)$ tidak berlaku.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adriaan C.Zaanen, 1997, *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer Verlag.

[2] Demiriz, S dan Cakan, C., 2010, On Some new paranormed Euler Sequence spaces and Euler Core, *Acta. Math. Sin. Eng. Ser.*, 26(7), 1207-1222.

[3] Demiriz, S dan Cakan, C., 2010, On Some new paranormed, *Genaral Math Note*, Vol 1, No.2, 26-42.

[4] Karakaya, V Simsek, N dan Polat, H., 2010, Some New Paranormed Sequence Spaces of Non-Absolute Type Operators, *Acta Sci.Math* (Szeged),76, 87-100.

[5] Kolk, E., 1994, Inclusion theorems for some sequence spaces defined by a sequence of moduli, *Tartu Ül. Toimetised* , 960 , 65–72.

[6] Lindenstrauss, J. dan Tzafriri, L., 1979, *Classical Banach Space* II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[7] Meyer, P. and Nierberg, 1991 : *Banach Lattice*, Springer-Verlag.

[8] Mursaleen, M dan Noman, A. K., 2010, On The Spaces of λ-Convergent and Bounded Sequences, *Thai J. Math*., 8(2), 311-329.

[9] Mursaleen, M dan Noman, A.K., 2011, On Some New Sequence Spaces of Non-Absolute Type Related to The Spaces ℓ_p and ℓ_∞ I, *Filomat* 25:2, 33-51.

[10] Naim.L.Braha., 2011, A New Class Of Sequences Related to the ℓ_p spaces defined by Sequences of Orlicz Functions, *Journal of Inequality and Application*, article ID 539745.

[11] Pehlivan, S. dan Fisher, B., 1995, Some Sequence Spaces Defined By A Modulus, *Math. Slovaca*, 45 No. 3, 275-280.

[12] Rao, M.M. dan Ren, Z.D., 1991, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcell Dekker, Inc, N.Y.

[13] Rao, M.M. dan Ren, Z.D., 2002, *Applications of Orlicz Spaces*, Marcell Dekker, Inc, N Y.

[14] Şengönül, M. dan Basar F., 2005, Some new Cesàro sequence spaces of nonabsolute type which include the spaces c0 and c, *Soochow J. Math*., 31(1), 107–119.

[15] Wilansky, A., 1984, *Summability through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics.

[16] Tripathy, B.C and Mahanta, S., 2003, On Class sequences related to the ℓ_p space defined by Orlicz functions, *Soochow J. Math*., no 4 , 379-391.

[17] Yimaz A. dan Tunay B., 2009, On a New class of sequences related to the ℓ_p space defined by Orlicz function., *Taiwanese. J. Math*.Vol 13, No 4, 1189-1196.